счетным семейством коммутирующих векторных полей.

Библиографический список

1. Л о б р и К. Динамические полисистемы и теория управления // Новое в зарубежной науке. Матем. М., 1979. Вып.14. С.134-173.

2. А л е ш н и к о в С.И. О метриках на гладком многообразии, связанных с динамическими полисистемами специального вида // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1990. Вып.21. С.5-7.

3. Г о д б и й о н К. Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. М.: Мир, 1973. 188с.

4. Ш е ф е р Х. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1971. 359с.

5. Б у р б а к и Н. Общая топология. Топологические группы. Числа и связанные с ними группы и пространства. М.: Наука, 1969. 392с.

6. Б у р б а к и Н. Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра. М.: Изд-во физ.-мат. литературы, 1962. 516с.

УДК 514.75

ОТОБРАЖЕНИЕ МНОГООБРАЗИЙ ГИПЕРКВАДРИК, ПОРОЖДЕННОЕ ТОЧЕЧНЫМ ОТОБРАЖЕНИЕМ

Б.А.А н д р е е в

(Калининградский государственный университет)

Построенное в работе [1] отображение f_q многообразий гиперквадрик, которое порождается точечным соответствием $f: P_n \to \hat{P}_n$ проективных пространств, обобщается для точечного отображения пространств произвольной размерности. Доказан ряд предложений, в которых устанавливается связь между свойствами отображений f и f_q в случае, когда f является субмерсией. В частности, доказано, что отображением f_q определяется характеристическая конфигурация отображения f и семейство соприкасающихся гиперквадрик распределения линейных элементов, порожденного отображением f .

1. Рассмотрим локальное дифференцируемое отображение $f: P \in P_m \mapsto p = f(P) \in \hat{P}_n$ проективных пространств, для которого $\mathrm{rang}\, f = \min(m,n)$ в каждой точке области определения. Поместив вершину R_0 подвижного репера $R = \{R_0, R_1, \ldots, R_m\}$ пространства P_m в точку P области определения отображения f , а вершину r_0 репера $r = \{r_0, r_1, \ldots, r_n\}$ в точку $p = f(P)$, получаем систему дифференциальных уравнений отображения f в виде:

$$\omega^i_0 = \Lambda^i_J \Omega^J_0 \quad (i,\ldots = \overline{1,n};\ J,\ldots = \overline{1,m}). \qquad (1)$$

Двукратное продолжение системы (1) приводит к фундаментальному объекту $\Gamma_2 = \{\Lambda^i_J, \Lambda^i_{JK}\}$ второго порядка отображения f , система дифференциальных уравнений которого имеет вид (4), (5) [2]. Имеем: $\mathrm{rang}\,[\Lambda^i_J] = \min(m,n)$.

2. Пусть $\mathcal{H}(p)$ - многообразие всех гиперквадрик $q \subset \hat{P}_n$, содержащих точку p , для которых p является неособой точкой. Уравнение гиперквадрики $q \in \mathcal{H}(p)$ имеет вид

$$a_{ij} x^i x^j + 2 a_i x^i x^0 = 0, \qquad (2)$$

причем уравнение

$$a_i x^i = 0 \qquad (3)$$

определяет плоскость, касательную к q в точке p .

Многообразие всех гиперквадрик Q :

$$A_{JK} X^J X^K + 2 A_J X^J X^0 = 0 \qquad (4)$$

пространства P_m , содержащих точку P и имеющих в ней касательную гиперплоскость, обозначим символом $\mathcal{H}(P)$. Закон изменения величин a_i, a_{ij}, A_J, A_{JK} при изменении вторичных параметров имеет вид (3), (5) [1]. Имеем:

$$\dim \mathcal{H}(p) = C^2_{n+1} + n - 1, \quad \dim \mathcal{H}(P) = C^2_{m+1} + m - 1.$$

Следующее предложение доказывается так же, как предложение I статьи [1].

П р е д л о ж е н и е 1. Отображение $f: P_m \to \hat{P}_n$ во 2-й дифференциальной окрестности каждой пары (P, p) соответствующих точек порождает отображение

$$f_q:\ q \in \mathcal{H}(p) \longmapsto Q \in \mathcal{H}(P),$$

которое задается формулами:

$$A_J = \Lambda^i_J a_i, \qquad (5)$$

$$A_{JK} = \Lambda^i_J \Lambda^j_K a_{ij} - \Lambda^i_{JK} a_i. \qquad (6)$$

3. В дальнейшем ограничимся рассмотрением отображения f_q для субмерсии f, полагая: $m > n$, откуда вытекает: $\dim Q \geq \dim q$ и $\dim \mathcal{H}(P) \geq \dim \mathcal{H}(p)$. Легко показать, что для этого случая справедливы все рассуждения, проведенные при доказательстве предложений 2 и 3 работы [1], в которых выясняется геометрический смысл отображения f_q, сохраняющийся, таким образом, и в нашем случае.

Пусть $\rho: q \in \mathcal{H}(p) \mapsto b \in B_p$ - отображение, которое гиперквадрике (2) ставит в соответствие ее касательную плоскость (3) в точке p; отображение ρ определяет расслоение $(\mathcal{H}(p), \rho, B_p)$ многообразия $\mathcal{H}(p)$ над связкой B_p всех гиперплоскостей из $\widehat{P}_n$, инцидентных точке p. Сечение $s: B_p \to \mathcal{H}(p)$ расслоения $(\mathcal{H}(p), \rho, B_p)$ будем называть простейшим, если $s(b)$ распадается на гиперплоскости, одна из которых совпадает с b, а другая является общей для всех $s(b)$, где $b \in B_p$.

Пусть V - подмногообразие в P_m, содержащее точку P. Обозначим символом $[V]$ множество прямых связки $\{P\}$, каждая из которых содержит две точки многообразия V или касается его в точке P, а символом χ - множество точек всех характеристических прямых отображения f в точке P.

Предложение 2. Конус характеристических прямых отображения f определяется отображением f_q:

$$\chi = [\bigcap_{b \in B_p} f_q \circ s(b)] . \qquad (7)$$

Доказательство. Поместим вершины r_i репера r на гиперплоскость π, общую для всех $q \in s(b)$. Для $f_q \circ s(b)$ получаем:

$$a_i (\Lambda^i_{jk} X^j X^k - 2\Lambda^i_j X^j X^0) = 0 . \qquad (8)$$

Базисные гиперквадрики семейства (8) определяются системой (1) работы [3] и, таким образом, определяют индикатрису отображения f в расширенное аффинное пространство, в котором π является несобственной гиперплоскостью. Доказываемое предложение теперь вытекает из теоремы 1 статьи [4].

4. Пусть Λ - прямая связки $\{P\}$, а $K(\Lambda)$ - ее образ при коллинеациях, касательных к отображению f в точке P. Если Λ - ненулевая характеристическая прямая, то каждой из коллинеаций, для которых эта прямая является главной, определяется одно и то же проективное соответствие $K_\Lambda: \Lambda \to K(\Lambda)$, имеющее вид (1.19) в [5]. Будем называть соответствие K_Λ характеристической гомографией на Λ. Пересечение прямой $K(\Lambda)$ с гиперквадрикой $q \in \mathcal{H}(p)$ (как и пересечение прямой Λ с гиперквадрикой $Q \in \mathcal{H}(P)$) состоит из пары точек, одной из которых является точка p (точка P). Как доказывается в следующем предложении, две другие точки соответствуют друг другу при характеристической гомографии на Λ.

Предложение 3. Отображение f_q определяет характеристические гомографии на ненулевых характеристических прямых:

$$K_\Lambda(\Lambda \cap f_q(q)) = K(\Lambda) \cap q . \qquad (9)$$

Доказательство. Пусть $A \neq P$ - точка характеристической прямой Λ, а $K_\Lambda(A) = \{x^0, x^i\}$ лежит на гиперквадрике (2). Поместим вершины r_i репера r на гиперплоскость π, содержащую $K_\Lambda(A)$. Тогда индикатриса отображения $f: P_m \to \widehat{P}_n$ в расширенное аффинное пространство, где π является несобственной гиперплоскостью, имеет вид

$$\Lambda^i_{jk} X^j X^k - 2\Lambda^i_j X^j X^0 = 0 , \qquad (10)$$

причем $A(X^0, X^j)$ удовлетворяет (10). Для $K_\Lambda(A)$ имеем: $x^0 = 0$, $x^i = \Lambda^i_j X^j$. При выполнении этих условий из (10) и (2) вытекает, что A лежит на $f_q(q)$:

$$a_i (\Lambda^i_{jk} X^j X^k - 2\Lambda^i_j X^j X^0) - a_{ij} \Lambda^i_j \Lambda^j_k X^j X^k = 0 . \qquad (11)$$

Предложения 2 и 3 показывают, что отображение f_q полностью определяет характеристическую конфигурацию отображения f в точке P.

5. Отображение f при $m > n$ порождает в области определения распределение $\{L^0\}$ $(m-n)$-мерных линейных элементов L^0, которые являются касательными подпространствами к многообразиям $W_p = f^{-1}(p)$ $(p \in \widehat{P}_n)$, центрированными точками P. Из (I) получаем систему уравнений подпространства L^0, соответствующего точке P:

$$\Lambda^i_j X^j = 0 . \qquad (12)$$

Пусть $T_P(Q)$ - касательная к гиперквадрике $Q \in \mathcal{H}(P)$ в точке P гиперплоскость.

Предложение 4. Отображение f_q определяет подпространство L^0 в точке P:

$$\bigcap_{q \in \mathcal{H}(p)} T_P(f_q(q)) = L^0 . \qquad (13)$$

Справедливость утверждения вытекает из формул (11) и (12).

Пусть $\mathfrak{A}$ - множество точек, лежащих на асимптотических прямых многообразия W_P в точке P .

П р е д л о ж е н и е 5. Отображение f_q определяет асимптотический конус многообразия W_P в точке P :

$$\bigcap_{q\in\mathcal{H}(P)} \left(T_P(f_q(q)) \cap f_q(q)\right) = \mathfrak{A}. \qquad (14)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (11) - (13) получаем для пересечения (14):

$$\Lambda^i_{JK} X^J X^K = 0, \quad \Lambda^i_J X^J = 0. \qquad (15)$$

Но эта система определяет асимптотический конус многообразия W_P в точке P .

Заметим, что в последних двух предложениях вместо множества всех $q \in \mathcal{H}(P)$ для построения множеств L^0 и $\mathfrak{A}$ достаточным является множество гиперквадрик, получаемых при простейшем сечении: $q = s(b)$, $b \in B_P$.

Гиперквадрики $f_q(q)$, где $q \in \mathcal{H}(P)$ не являются соприкасающимися гиперквадриками [6] распределения $\{L^0\}$. Но с помощью отображения f_q можно построить семейство соприкасающихся гиперквадрик. Пусть H - произвольная гиперплоскость, не инцидентная точке P , а T - проективное преобразование пространства P_m , определяемое условиями: 1) $T(P)=P$, $T|_H = id\,H$; 2) точка $A \in P_m$ гармонически сопряжена точке $T(A)$ относительно точек P и K , где K - точка пересечения прямой $[PA]$ с гиперплоскостью H .

П р е д л о ж е н и е 6. $(n-1)$-мерное семейство гиперквадрик $T\circ f_q\circ S(b)$, где S - простейшее сечение расслоения $(\mathcal{H}(P), \rho, B_P)$, является семейством соприкасающихся гиперквадрик распределения $\{L^0\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поместим вершины r_i репера r на гиперплоскость π , общую для всех $q = S(b)$. Базисные гиперквадрики семейства $f_q\circ S(b)$ принимают вид (I) [3]. Дальнейшее доказательство совпадает теперь с доказательством теоремы 5 статьи [3].

Библиографический список

I. А н д р е е в Б.А. Отображения многообразий гиперквадрик, порожденные точечным соответствием // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1990. Вып.21. С.8-12.

2. А н д р е е в Б.А. К теории точечных отображений // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1989. Вып.20. С.9-14.

3. А н д р е е в Б.А. К геометрии дифференцируемого отображения $f: P_m \to \hat{P}_n$ $(m>n)$ // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1987. Вып.18. С.5-9.

4. А н д р е е в Б.А. О распределении линейных элементов, порожденных отображением $f: P_m \to A_n$ $(m>n)$ // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1979. Вып. 10. С.5-9.

5. Р ы ж к о в В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами // Геометрия, 1963. Итоги науки / ВИНИТИ. М., 1965. С.65-107.

6. Л а п т е в Г.Ф., О с т и а н у Н.М. Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I // Тр. геометрич. семинара / ВИНИТИ. М., 1971. Т.3. С.49-94.

УДК 514.75

ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА, АССОЦИИРОВАННЫЕ С $\hat{\mathcal{H}}(\Lambda,L)$-РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

С.Ю.В о л к о в а

(КВВМУ)

Рассматривается специальный класс скомпонованных $\mathcal{H}$-распределений [1], которые названы $\hat{\mathcal{H}}(\Lambda,L)$-распределениями [2]. Найдены внутренние инвариантные поля квазинормалей и нормалей в различных дифференциальных окрестностях для основных структурных распределений данного $\hat{\mathcal{H}}(\Lambda,L)$-распределения. Получены инвариантные оснащения в смысле Картана основных структурных распределений, ассоциированных с $\hat{\mathcal{H}}(\Lambda,L)$-распределением.

Во всей работе используются обозначения и терминология работы [2]. Индексы пробегают следующие значения: $p, q, r, s, t = \overline{1,r}$; $i, j, k, \ell = \overline{r+1,m}$; $a, b, c = \overline{1,m}$; $J, \mathcal{J}, K = \overline{0,n}$; $\alpha, \beta, \gamma, \sigma = \overline{m+1,n-1}$; $\hat{p}, \hat{q}, \hat{r}, \hat{s} = \{\overline{1,r}; n\}$; $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k} = \{\overline{r+1,m}; n\}$; $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w} = \overline{r+1,n}$; $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\sigma} = \overline{m+1,n}$; $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C} = \{\overline{1,r}; \overline{m+1,n-1}; n\}$.